

Title	實変數函數論ニ於ケル二三重要ナル問題ニ就テ
Author(s)	功力, 金二郎
Citation	全国紙上数学談話会. 54 p.1-p.13
Issue Date	1935-08-23
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74111
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

189. 實変數函數論ニ於ケル二三重要ナル 問題ニ就テ

功力金二郎 (北大)

以下述バルコトハ簡單ナニトデアルカラ論文トシテデナク銷夏的談話トシテ読ンデ頂キタイ。

今簡單ノタメニ一次点集合 (實數ノ集合)ヲ考ヘル。相素ナル (共通部分ナキ) ニツノ集合 A, B ニ對シテ相素ナル Borel 集合 E, F が存在シテ $A \subseteq E, B \subseteq F$ ナラシメ得ルトキハ A ト B トハ互ニ Borel 集合ニヨツテ分タレル、或ハ séparable (B) デアルト言ハレル。 A, B がヒドク複雑ナル集合デアルトタトハ相素デアツテモ一般ニ séparable (B) デナイ。任意ノ集合がサウイフ複雑ナルニ集合ニ分解出來ルカドウカト云フ問題ヲ *N. Lusin* が考ヘテ 1934 年バリノ *Comptes Rendus* t. 196 第 1296 頁ニ次ノ定理ヲ発表シタ。

定理 I. 任意ノ非可附着ナル一次点集合 E ハ (適當ニ分ケサヘスレバ) séparable (B) ナラザルニ集合 E_1, E_2 ($E = E_1 + E_2; E_1 \cdot E_2 = 0$)ニ分解サレル。

シカモ *Lusin* 以外ニ時ヲ同ジクシテ *Novikoff* モ亦同ジ結果ヲ得タト報ジテアル、サテコノ定理 I ハ餘程ヨイ結果デアルヤウニ思ハレル、コノ稿デハ何故ニソノナニヨイ結果デアルカ理由ヲ示シ合セテニ、三ノ注意ヲシタイト思

フ、即チ以下詳シク述ベルヤウニ定理Iカラハ数多ノ從來難解トシテ有名ナ問題ガ綺麗ニ解決ツクノデアル。

(1) Kuratowskiノ問題: Kuratowskiノ著書, Topologie I (1933) 第254頁ニ提出サレテアル問題デ、Lebesgueノ fonctions mesurable (B)ニ関スルモノデアル。

今ソレヲ説明シヨウ。metric space (距離空間) R ニ於テ定義サレタ寫像 $y=f(x)$ ヲ考ヘル。 $f(x)$ ノ値域 R^* モヤハリ metric space (或ハアル metric spaceノ一部トシテモ同ジコト)デアルトスル。寫像 $y=f(x)$ ニ就イテ、値域 R^* ニ於ケル任意ノ Borel 集合ノ $y=f(x)$ ニヨル原像ガヤハリ R ニ於テ Borel 集合デアルナラバ $y=f(x)$ ハ mesurable (B)ナル寫像デアルト云ハレル。コニKuratsowskiノ問題ト云フノハ R ガ完備ニシテ可分ナル場合 R^* モ亦可分ニナルカ? ——ト云フノデアル。定理Iヲ用ヒテ R^* ガ可分ニナルコトヲ証明シヨウ。

證明 先ヅ R ハ完備ニシテ可分 (且ツ勿論ソノ濃度非可附番ナル場合ダケ考ヘレバヨイ)デアルカラ、ソノ高々可附番ナル部分集合ヲ除キ残リハ無理数ノ全体ノ集合 N カラ一對一デ且ツ連続ナ寫像ヲ移レコトガ出來ル、コノ寫像ヲ $x=g(t)$, $t \in N$ トスル。ソコデ $y=f(x)=f\{g(t)\}=\varphi(t)$ ナル寫像ヲ考ヘルト $g(t)$ ガ連続デアレカラ明カニ $\varphi(t)$ ハ $f(x)$ ト共ニ、ヤハリ mesurable Bノ寫像トナル。ソノ値域ハ

R^* の部分集合が R^* と、差高々可附番シカ違ハナイカテ一般性ヲ失ハズ = R が即チ N デアル場合ダケヲ考ヘルコトが出来ル。

サテ帰謬法ヲ以テ証明ショウ。 R^* が可分 (*séparable*) デナイトスル。スルト R ハ *metric space* デアルカテ相素ナレ開集合ノ族ニシテ、ソノ濃度非可附番ナルモノが存在スル。今ソノ各開集合カテ一点ヅツヲ取り出シテソノ和 E^* ナル集合ヲ作ルト E^* ハ孤立点ノミヨリナル、ヨツテ E^* ノ各部分ハ E^* = 於テ開デタル集合デアル。次ニ E^* ノ各点 e^* = 對シテソノ原像 $f^{-1}(e^*)$ ヲ考ヘル。 $f^{-1}(e^*)$ カテソノ任意ノ一点ヲ選ンデ e トシ、カール e ノ全体ヲ E トスル。 E ハ N ノ部分集合デ、 E^* が非可附番デアルカラ E モ亦非可附番デアル。スルト定理 I = ヨツテ E ヲ二ツノ部分 E_1, E_2 ニワケテ、 $E = E_1 + E_2$, $E_1 \cdot E_2 = 0$, E_1 ト E_2 トハ *séparable* (B) デナイヤウニスルコトが出来ル。今 $f(E_1)$ ヲ考ヘルト之ハ E^* ノ一部分デアルカラ $E^* = 於テ開デタル集合デアル$ 。即チ $R^* = 於テ開デタル集合 F^* が存在シテ $f(E_1) = F^* \cdot E^*$ トナル。$

$f(E_1) \cdot f(E_2) = 0$ デ且ツ $f(E_2) \leq E^*$ デアルカラ $F^* \cdot f(E_2) = 0$ トモナル。即チ F^* ノ原像 $f^{-1}(F^*)$ ハ E_1 ヲ含ンデ E_2 ト相素デアル。他方デ $f(x)$ が *mesurable* (B) デアルカラ $f^{-1}(F^*)$ ハ N = 於ケル *Borel* 集合デアル。 N ハ G_δ 集合デアルカラ $f^{-1}(F^*)$ ハ一次点集合トシテ

Borel 集合デアル。即チ E_1 ト E_2 トが Borel 集合
 $f^{-1}(F^*)$ ト $Cf^{-1}(F^*) = \text{ヨツテカタレタコトニナリ}$, 是レ
 不合理デアル。 Q.E.D.

(2) Hausdorff ノ問題 *Fundamenta*
Mathematicae t. XX (1933) 第 286 頁 = 問題 (58)
 トシテ提出サレテキルモノデアル。先ヅ Hausdorff が
 提出シタ通り = 問題ヲ述ベテ見ヨウ。 問題: 濃度 \aleph_1 ナル集
 合 E がアルトキソノ可附番個ノ部分集合 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n,$
 \dots ヲ適當ニ與ヘテ E ノ凡テノ部分集合 X ヲ $X = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_{p_n}}$
 ナル形ニ表ハスコトが出来ルカ? 但シコノ p_n ハ自然数ノ
 部分列 (同ジ数ヲ繰リ込ヘスコトモ許ス), $\overline{\lim}$ ハ Borel
 ノ意味, *ensemble limite complet* (最大極限集合)
 ヲ意味スル。 (上述ノ性質ヲ有スル $\{A_n\}$ ノ存在シナイコト
 ヲ *Kontinuum hypothesis* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ヲ用ヒガニ
 証明スルコトヲ要求スル)。—— ト云フノデアル。尚ホ
 Sierpinski 著 "*Hypothèse du continu*" (1934)
 第 91 頁參照。

サテ吾々ハコノ *Kontinuum hypothesis* ヲ用
 ヒズ、定理 I カラコノ証明ヲ與ヘヨウ。

証明 E ヲ與ヘラレタル集合デ、ソノ濃度 \aleph_1 トシ今 E ,
 ノ部分集合ノ列 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ が任意ニ與ヘ
 ラレテキルトスル。ソコデ $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_{p_n}}$ ナル形ニ表ハサレナイ
 E ノ部分集合 X ヲ求メテ見ヨウ。 E ノ各要素 $x = x \in A_n$ ヲ

ミタス n がケヲ、ソノ大イサノ順ニ並マテ書クコトニスル。

スルト $(n_1, n_2, n_3, \dots, n_K, \dots)$ $n_K < n_{K+1}$ ナル
 自然数ノ無限列ヲ得ルカ又ハアル所カラ先ニ含マレナイタメ
 $= (n_1, n_2, \dots, n_K)$ $n_i < n_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, K-1$
 ナル有限列ヲ得ルカ或ハ全クカゝル n_K が存在シナイカデア
 ル。最後ノ場合ニハ $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ = 含マレナイカラ $X = (x)$,
 即チ x がケヲ集合ト見ルト之ハ明カニ $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{n_r}$ ナル形
 ニ表ハシ得ナイ。カゝル x ノ存在スル場合ニハ証明ハ既ニス
 ソダコトニナル。ヨツテ以後コノ第三ノ場合ハ起ラナイコト
 ニシテ議論ヲ進メヨウ。第二ノ場合ニハ $(n_1, n_2, n_3, \dots$
 $\dots, n_K, n_{K+1}, \dots)$ $n_1 < n_2 < \dots < n_K = n_{K+1} = n_{K+2} = \dots$
 \dots ヲ以テ示スコトニスル。スルト如何ナル場合ニモ $x \in E$
 ナル x ニ對シテ $(n_1, n_2, n_3, \dots, n_K, \dots)$ ナル自
 然数ノ單調増加列ガ對應シテソコニ現ハレタル n_K = 就テハ
 常ニ $x \in A_{n_K}$ デソコニ現ハレザル n'_K = 就テハイザレモ
 $x \in A_{n'_K}$ デアル。

サテ次ニ相異レル二要素 x 及ビ y = 同ジ $(n_1, n_2, \dots$
 $\dots, n_K, \dots)$ ガ對應サレル場合ガアル。ソノトキソノ一方
 x ヲ含ミ他 y ヲ含マナイ E ノ任意ノ部分集合ヲ X トオクト
 カゝル X ハ明カニ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{n_r} = (A_{n_1} + A_{n_2} + A_{n_3} + \dots)(A_{n_1} + A_{n_2} + \dots)(A_{n_3} + \dots)$$

\dots トシテ表ハシ得ナイ、カゝル x, y ノ存在スルトキハ

証明ハ既ニスンダコトトナル。ヨツテ以後相異ナル x, y ハ相異ナル系列 $(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ が對應サレルコトトシテ議論ヲ進メヨウ。

サテ今度ハコノ自然数ノ系列 $(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ ヲ $0 < t < 1$ ナル無理数ノ連分數展開トシテ考ヘヨウ。 $0 < t < 1$ ナル無理数ノ全体ヲ N ヲ以テ示ス。カクテ $x \in E$ ナル凡テノ $x =$ 無理數が對應スルコトニナル。而モコノ對應ハ E ノ全体ト N ノ一部ハ E^* トノ一對一對應ニナル。ソコデコノ對應ニヨツテ A_n ハドコヘ移サレルカヲ見ヨウ。 $N =$ 属スル無理數ノ中ソノ連分數展開ガ n_1, n_2, \dots, n_k カラ始マル數ノ全体ヲ N_{n_1, n_2, \dots, n_k} ヲ以テ示ス。今 $A_n =$ 對應スル無理數ノ全体ヲ A_n^* トスレバ A_n^* ハ $(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ ノドコカニ現ハレルヤウナ無理數ヲ而モカナル n ハ $k=1, 2, 3, \dots, n$ ノ間ニ現ハレナケレバ絶對ニ現ハレナイカラ

$$A_n^* = E^* \cdot \left(N_n + \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,n} + \sum_{i \neq j \leq n} N_{i,j,n} + \dots \right. \\ \left. \dots + \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq n} N_{i_1, i_2, \dots, i_t, n} + \dots + N_{1,2,3,\dots,n} \right)$$

トナル。 N_{n_1, n_2, \dots, n_k} ハ $N =$ 於ケル *interval* (開區間) デ、上ノ右辺ノ括弧内ハソノ有限個ノ和デアルカラ、之レハ $N =$ 於ケル開集合デアル。即チ A_n^* ハ $E^* =$ 於ケル開集合デアル。ヨツテ $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^* = (A_{n_1}^* + A_{n_2}^* + \dots)(A_{n_2}^* + \dots) \dots$ ヲ以テ表ハサレル集合ハ凡テ $E^* =$ 於ケル $G\delta$ 集合デアル。

サテマタ他方デ Hausdorff ノ問題ハ問題ノ性質上一
 對一對應ニヨツテ不変デアアル。EトE^{*}トノ間ノ一對一對應
 ニヨリ A_nガ A_n^{*}ニ移ル以上、E^{*}ノ部分集合ニシテ $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^*}$
 ヲ以テ表ハサレナイモノヲ求めレバ充分デアアル。即チ E^{*}ニ
 於ケル G_δ ナラザル E^{*}ノ部分集合 X^{*}ヲ求めレバ充分デア
 ル。Eノ濃度ガ \aleph_1 デアルカラ E^{*}ノ濃度モ亦同ジデ非可附
 番デアアル。ヨツテ定理1カラ E^{*}ヲニツニ分解シテ E^{*} = E₁^{*} + E₂^{*},
 E₁^{*} · E₂^{*} = 0 トシ E₁^{*}トE₂^{*}ヲ互ニ *séparable* (B) デナク
 スルコトが出来ル。E₁^{*} = X^{*}トオケバ之ガ吾々ノ求めル集
 合デアアル。何トナレバ若シ E₁^{*}ガ E^{*}ニ於テ G_δ 集合デアレ
 トスレバ一次点集合ナル G_δ 集合 G 存在シテ E₁^{*} = E^{*} · G ト
 ナル。E₁^{*} · E₂^{*} = 0, E₂^{*} ⊆ E^{*} カラ, シタガツテ G E₂^{*} = 0.
 ヨツテ E₁^{*} ⊆ G; E₂^{*} ⊆ CG トナリ E₁^{*}, E₂^{*}ハ Borel 集合 G
 及ビ CGニヨツテ分タレルコトトナツテ不合理デアアル。E₁^{*}
 ハ E^{*}ニ於テ G_δ 集合デナク, 全ク吾々ノ求めル集合デアアル。
 カクテ Hausdorff ノ要求スル証明ハ全ク完了シタ。
 序ニモウツ面白い結果ヲ舉ゲヨソ。

(3) 1914年解析集合論ノ誕生ニ先驅ケテ Baire ノ
 性質ヲ有シテ Baire ノ函数ニ非ル函数ヲ作ルタメニ, N.
 Lusin ハ, Kontinuum hypothesis $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ヲ
 用ヒテ, 任意ノ疎ナル一次点集合ト高々可附番個ノ点トカ共
 有シナイ一次点集合ヲ定義シ, 1924年ニハ W. Sierpinski
 ハ又ハリ $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ナル假定ノ下ニ上ト dual = 當ル性質

——即チ任意ノ *Lebesgue* ノ意味デ *measure 0* ナル一
 次点集合ト高々可附番個ノ点シカ共有シナイト云フ性質——
 ヲ有スル一次点集合ヲ定義シタコトハ歴史的ニ有名デアルカ
 ラ誰デモ御存ジノコトデアラウ。 *Sierpinski* ハコノ後ノ
 性質ヲ *S* ト名ヅケテキル。サテ *E. Szpilrajn* ガ *Funda-*
menta Mathematicae t. XV. デ示シタヤウニ容易ニ、
 一次点集合 *E* ガ性質 *S* ヲ有スルトキ任意ノ *Lebesgue* ノ意
 味デ *measurable* ナ一次点集合 *M* ニツキ $M \cdot E$ ハ *E* ニ於
 テ F_σ 集合トナルコトガワカル。實際 *M* ヲ *measurable*
 ナル集合デアルトスルト、ソノ等測族 *Q* ヲ用ヒテ $M = Q + N$ 、
 Q ハ F_σ 集合、 N ハ *measure 0* ノ集合ト云フヤウニ表入
 サレル。(吉田洋一氏: 実変数函数論 (岩波講座, 数学) 第
 160 頁参照)。ヨツテ $ME = QE + NE = QE + NE \cdot E = (Q + NE) \cdot E$
 デアル。然レニ *E* ガ性質 *S* ヲ有シ N ガ *measure 0* デアル
 カラ $N \cdot E$ ハ高々可附番ナル集合、即チ F_σ 集合デ、從ツテ
 $Q + NE$ ガ F_σ 集合トナリ $(Q + NE) \cdot E$ 即チ $M \cdot E$ ハ *E* ニ於
 ケル F_σ 集合デアル。 Q. E. D.

コノ性質——ソコニ於ケル *measurable* ノ集合ガ凡
 テソコニ於ケル F_σ 集合デアル——ヲ性質 σ^* ト名ヅケヨウ。
 性質 σ^* ハソレダケヲ研究シテモ面白い。(例ヘバ *Kura-*
towski: Topologie I. 第272頁ノ空間ノ項参照。
 ノ空間ト性質 σ^* トハ全ク同ジデハナイガ)。サテコノデハ
 (3) トシテ上ト逆ノ問題ヲ考ヘテ見ヨウ。即チソコニ於ケル

measurable ノ集合が凡テソコニ於ケル F_σ 集合デア
 ナラバ実ハコノ一次点集合ハ S ナル性質ヲ有スルコトヲ定理
 I カラ証明シヨウ。サウスレバ上ノ *Szpilrajn* ノ証明ト
 合セテ性質 S トノ^{*}トガ全然一致ナルコトガ (*Kontinuum*
hypothesis 無シニ) 得ラレタコトニナル。

証明 一次点集合 E ト任意ノ可測集合 M トノ共通部
 分 ME が E ニ於ケル F_σ 集合デアルトシ、 N ヲ測度 0 ナル
 任意ノ集合トスル。 $N \cdot E$ が高々可附番デアルコトヲ示サウ。
 NE が若シ可附番デナケレバ定理 I ニヨツテ $NE \supset NE = E_1 + E_2$;
 $E_1 \cdot E_2 = 0$ ノ如ク分解シテ E_1 ト E_2 トヲ互ニ *séparable* (B)
 デナクスルコトが出来ル。然ルニ $E_1 \subseteq N$ デアルカラ E_1 モ測
 度 0 デ從ツテ可測デアル。ヨツテ假定カラ E_1 ハ E ニ於ケル
 F_σ 集合デアル。即チ F_σ 集合ナル一次点集合 A が存在シテ
 $E_1 = A \cdot E$ トナル。 $E_1 \cdot E_2 = 0$ デ $E_2 \subseteq E$ デアルカラ $A \cdot E_2 = 0$
 或ハ $CA \supset E_2$ 。 A が F_σ 集合デアルカラ $CA \in \text{Borel}$ 集
 合デ、 E_1 ト E_2 トガ *Borel* 集合 A ト CA トニヨツテ分タ
 レル。コレ不合理デアル。 Q.E.D.

以上デ定理 I が如何ニ良イ結果デアルカヲ示スコトが出来
 来タカラ今度ハ定理 I ソノモノニ就イテ少シク考ヘテ見ヨウ。
 コノ定理 I ヲ発表シテカラ約一ヶ月ノ後 *Lusin* ハ同ジク
 ばかりノ *Comptes Rendus* t. 198. 第 1671 頁ニ定理 I
 ノ特別ナル場合——集合 E が測度 0 ナル集合デナイ場合、
 或ハ集合 E が *toujours de première catégorie* デナイ

場合——＝對スル別証明ヲ詳シク発表シタ。ソシテ上記定理Ⅰノ前論文ニ於ケル証明ニ就テハ

Une observation nous a montré que la chaîne de nos déductions ne peut pas être regardée comme tout à fait complète.

ト断リ書キシテアル。ソコデ上記(1), (2), (3)ノ各証明ヲ調べテ見ルト、ソコニ出テ來ル定理Ⅰノ集合 E ニ當ル集合ハ因ツタコトニ同時ニ測度0デ且ツ *toujours de première catégorie* デアルカモ知レヌ。定理Ⅰヲコノマウナ特別ナ場合カケニ訂正サレテハ "*Cas importants*"ニハ相違ナイトシテモ懸隔甚ダシイモノガアルマウデアル。少クトモ吾々ノ場合ニハ就レモソノマコデハ役ニ立タナイノデアル。ソコデ定理Ⅰノ代用ニナル定理ヲ探シテ見ヨウ。先ヅ上記C. R. 第1296頁ニアル定理Ⅰノ証明ヲ逐次的ニ検査シテ見ルト、カナリ詳シク述ベテアツテドコニモ誤リガナイマウデアル。*chaîne des déductions*ハコノ部分ノミ關スル限りニ於テハ至極完全ノマウニ思ハレル。只途中デ一ヶ所 *Lusin*ガヨリ前ニ発表シタ次ノ定理Ⅱヲ用ヒテアル。

定理Ⅱ. 平面上ニ於ケル Borel 集合 A トソノ補集合 CA トハ互ニ *enchevêtrés* デハナイ。(但シココニ平面上ニ於ルニツノ集合 A 及 OC ガ互ニ *enchevêtrés* デアルトハ——平面上ノ点ヲ (x, y) デ示ストシテ、 y 軸上ニ適當ニトリサヘスレバ非可附番集合 H ガ存在シテ H ヲ如何ニ $H = H_1 + H_2$, $H_1 \cdot H_2 = 0$ ト云フ風ニ分ケテモソレニ對シテ $x = x_0$ 直線 $x = x_0$ ト

集合 A , \mathcal{O} トノ交ハリ (y 軸ヘノ影響) ヲ夫々 A_0, \mathcal{O}_0 トス
ルトキ $H_1 \subseteq A_0, H_2 \subseteq \mathcal{O}_0$ トナル。——コトデアル。

定理IIカラ定理Iヲ出シタ *N. Lusin* ノ証明 (C.R. t.
196 第1297頁ニアル) ヲ念ノタメゴニ述ベテ見ヨウ。
ソコニ誤リガアルカドウカ御注意アリタイ。

証明。 與ヘラレタル濃度非可附番ノ集合ヲ E トスル。
 E ノ濃度非可附番ヲ有スル任意ノ部分集合ニツキ定理ヲ証明
スレバ同時ニマタ E ニ就イテハ尚更成立スルカラ一般性ヲ失
ハズニ最初カラ E ノ濃度ハ \aleph_1 デアルト假定スルコトが出来
ル。サテ $\aleph_1^2 = \aleph_1$ デアルカラ與ヘラレタル E テ \aleph_1 個ノ互ニ
相素ナル且ツ濃度 \aleph_1 ヲ有スル集合ニ分解スル。之等ノ集合
ハ \aleph_1 個アルカラ *Cantor* ノ第一級及ビ第二級ノ順序数ヲ
添数ニ用ヒテ $E_0, E_1, E_2, \dots, E_\omega, \dots, E_\alpha, \dots$
 $0 \leq \alpha < \aleph_1$ ト云フ風ニ表ハスコトが出来ル。ソコデ E_α ニ
對シテ平面上ニ第 α 級 *Borel* 集合 (一次点集合トシテノ)
ニ對スル萬有 *Borel* 集合 (即チ高々 α 級ナル任意ノ *Borel*
集合 M ニ對シテ適當ニ $x = x_0$ ヲ選ビ、 y 軸ニ平行ナ直線
 $x = x_0$ デ切ルト。ソノ切口ガ丁度ソノ集合 M ニナルヤウ
ナ平面上ノ *Borel* 集合) ヲ對應セシメ之ヲ H_α ト名ツケ
ヨウ。(カナル集合ノ存在ニツイテハ、例ヘバ *H. Hahn: Reelle Funktionen, erster Teil* (1932), 第
273 頁 33.8.31 参照)

サテ定理IIニヨルト H_α トソノ補集合 CH_α トハ互ニ

enchevêtrés ナイカラ E_α ヲ適當ニニツ＝ワケテ

$E_\alpha = E'_\alpha + E''_\alpha$; $E'_\alpha \cdot E''_\alpha = 0$ トシ如何ナル $x = x_0$ ヲトツテモ H_α ト CH_α トノ切口ガ E'_α, E''_α ヲ分ケナイヤウニ E'_α, E''_α ヲ選ブコトガ出來ル。 H_α ハ直線上ノ α 級 *Borel* 集合ニ對スル萬有集合デアルカラ E'_α, E''_α ハ高々 α 級ノ *Borel* 集合ニヨツテハ分タレナイ。

サテ $E' = \sum_{0 \leq \alpha < \aleph_0} E'_\alpha$; $E'' = \sum_{0 \leq \alpha < \aleph_0} E''_\alpha$ トスルト E_α ガ互ニ素デア

アルカラ E' 及ビ E'' モ互ニ素デ、マタ E_α ノ和ガ E デアルカラ $E' + E'' = E$ デアル。最後ニ E', E'' ハ決シテ *séparable* (B) デナイ。何トナレバ若シ相素ナル *Borel* 集合 A, B ガ存在シテ $E' \subseteq A, E'' \subseteq B$ デアルトスルト、 A, B ハ *Borel* 集合デアルカラ $0 \leq \alpha < \aleph_0$ ナル或ル α ニ對シテ A, B ハ高々 α 級ノ *Borel* 集合デナクテハナラヌ。スルト E', E'' ノ部分集合タル E'_α, E''_α モ亦高々 α 級ノ *Borel* 集合 A, B デ分タレルコトニナリ、是レ不合理デアル。即チ E', E'' ハ吾々ノ求メル分解デアル。 Q. E. D.

コノヤウニシテ見ルトヤハリ定理 II が問題ニナルヤウデア

アル。シカモ上記 (1), (2), (3) ノ証明ニハ定理 I ハ必要ナク定理 II ダケアレバ明カニ足ルノデア

ル。Lusin ノコノ定理 II ハヤハリは°リノ *Comptes Rendus* t. 198. 第 1118 頁ニ掲ゲラレテアル、ソシテソコニハ、Fermat 流帰納法 (*méthode de descente indéfinie*) ヲ集合論内

ニ將來シテソノ應用トシテ得ラレルト云フノミダ詳シイ証明
ハ興ヘテナイ。

——後記。 以上デ小生ノ話ハ終リデアリマスが上記
ノ外ニ定理Ⅰ又ハⅡノ應用ハ廣イコトト思ハレマス。ソレ故
ニ小生ハ定理Ⅱノ証明ガ欲シイノデアリマス。C.R. E. 198
第1118頁ニアル説明ガケデハ箇ニ過ギテ満足デアルトハ云
ハレマセン。Lusinノ手許ニハドウイフ風ニマツテアル
デセウカ？（非常ニ優秀ナル数學者デアルカラ少クトモ満足
ニ近イモノハ出來テキルデセウガ）。之等ノ論文が出テ日尚
浅イノデスカラ、ソノ後ドコカデ発表サレテキルノニ小生ガ
マダ氣ガツカナイノカモ知レマセン。サウイフ論文ヲ御存ジ
ノ方、又ハ上記定理Ⅱノ証明ノ出來タ方ニハ是非御教示願ヒ
タイノデアリマス。

—— 以上 ——